スタディサプリ　センター数学ⅡＢについて

この講座は，「平成 26・28・29・30 年度　大学入試センター試験　追試験」をベースに，大学入学共通テストの数学の学習を進める上で土台となる「誘導形式のマーク式試験を解くために必要な力とは何か」をお伝えするための講座です。

センター数学は，その答える形式はマークではあるものの，そこに至るまでに必要な力は，記述試験と遜色ありません。また，決して長いとは言えない試験時間内に確実に解答に至るために，迷いや遠回りがほぼ許されないという点では，ある意味，記述試験より厳しい試験と言えます。一見して親切に見える誘導も，あなたにやってほしいすべてのことを伝えてくれているわけではなく，「流れ」を理解し，省略されているプロセスや途中計算を補いながら，必要に応じてあなた自身で解答を作っていく，そんな試験です。ゆえに，数学に関しては，記述力がある人でもセンターで点数がとれない，ということが起こりうるのです。

この講座を受けていただく時点でのあなたの実力が，大学入学共通テストを読み解くために必要な土台となる力に対して，どこまで到達し，上回り，また下回っているかについて，予習と講義動画を通じて分野別に整理することで，あなたの今後の学習の指針となるでしょう。

この講座をきっかけとし，さらに思考力・判断力・表現力を磨くための学習に進むべきか，単元・項目ベースの基本に戻るべきか，それを把握して学習を進めることが，大学入学共通テストのみで数学を使う人はもちろん，個別選抜で数学を使う人にとっても，実力向上のカギとなります。あなたに必要な，あなただけのカギ，ぜひこの講座で発見してください。

山内　恵介

― 目次 ―

第１講（１日目）　**指数関数・対数関数・図形と方程式**

第２講（２日目）　**三角関数**

第３講（３日目）　**微分法・積分法**

第４講（４日目）　**数列**

第５講（５日目）　**ベクトル**

※該当する講の「予習」を，ノート等に必ず行ってから授業に臨んで下さい。
当日の授業は，予習を行っていることを前提に行われます。

第1講　指数関数・対数関数・図形と方程式

1　a を定数とする。x の方程式

$$4^{x+a}-2^{x+a}+a=0 \quad \cdots\cdots①$$

がただ一つの解をもつとき，その解を求めよう。

(1)　$X=2^x$ とおくと，X のとり得る値の範囲は **ア** である。**ア** に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪　$X \geqq 0$　　①　$X>0$　　②　$X \geqq 1$　　③　$X>1$

また，①を X を用いて表すと，X の2次方程式

$$2^{\boxed{イウ}}X^2-2^{\boxed{エ}}X+a=0 \quad \cdots\cdots②$$

となる。この2次方程式の判別式を D とすると

$$D=2^{\boxed{イウ}}(\boxed{オ}-\boxed{カ}\,a)$$

である。

（次ページに続く）

(2)　$a = \dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ のとき，②は $\boxed{\text{ア}}$ の範囲でただ一つの解をもつ。したがって，①もただ一つの解をもち，その解は $x = \dfrac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

(3)　$a \neq \dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ のとき，②が $\boxed{\text{ア}}$ の範囲でただ一つの解をもつための必要十分条件は，$\boxed{\text{コ}}$ である。$\boxed{\text{コ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪　$a > 0$　　　①　$a < 0$

②　$a \geqq 0$　　　③　$a \leqq 0$

④　$a > \dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$　　　⑤　$a < \dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$

$\boxed{\text{コ}}$ のとき，①もただ一つの解をもち，その解は

$x = \boxed{\text{サ}}\,a - \boxed{\text{シ}} + \log_2\left(\boxed{\text{ス}} + \sqrt{\boxed{\text{オ}} - \boxed{\text{カ}}\,a}\right)$

である。

2　$x>1$，$y>0$ の範囲にある x，y が

$$(2y)^{\log_4 x}=16 \quad \cdots\cdots ①$$

を満たすとき，$A=x\sqrt{y}$ の最小値を求めよう。

$s=\log_2 x$，$t=\log_2 y$ とおく。x が $x>1$ の範囲にあるとき，s のとり得る値の範囲は $s>$ **ア** である。また，$\log_2 A$ を s と t を用いて表すと

$$\log_2 A=s+\frac{t}{\boxed{\text{イ}}} \quad \cdots\cdots ②$$

である。

底の変換公式により

$$\log_4 x=\boxed{\text{ウ}}\,s \quad \cdots\cdots ③$$

が成り立つ。**ウ** に当てはまるものを，次の⓪～⑦のうちから一つ選べ。

⓪ $-\frac{1}{4}$　① $-\frac{1}{2}$　② -2　③ -4

④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{1}{2}$　⑥ 2　⑦ 4

（次ページに続く）

①の両辺の 2 を底とする対数をとると，③により

$$s(t+\boxed{\text{エ}})=\boxed{\text{オ}} \quad \cdots\cdots④$$

が成り立つ。②，④により，$\log_2 A$ を s を用いて表すと

$$\log_2 A=s+\frac{\boxed{\text{カ}}}{s}-\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

となる。

$s>\boxed{\text{ア}}$ であることに注意すると，$\log_2 A$ は $s=\boxed{\text{ケ}}$ のとき最小値をとることがわかる。

したがって, A は $x=\boxed{\text{コ}}$, $y=\boxed{\text{サ}}$ のとき, 最小値 $\boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}$ をとる。

3　座標平面上に原点 O を中心とする半径 2 の円 C と点 A(4, 3) がある。

(1)　点 P が C 上を動くとき，線分 AP を 2：1 に内分する点 Q の軌跡を求めよう。

円 C の方程式は

$$x^2+y^2=\boxed{\text{ア}} \quad \cdots\cdots①$$

である。P の座標を $(s,\ t)$，Q の座標を $(x,\ y)$ とすると，Q は AP を 2：1 に内分するので

$$x=\frac{\boxed{\text{イ}}+\boxed{\text{ウ}}s}{\boxed{\text{エ}}},\quad y=\frac{\boxed{\text{オ}}+\boxed{\text{ウ}}t}{\boxed{\text{エ}}}$$

が成り立つ。よって，x，y は

$$\left(x-\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\right)^2+\left(y-\boxed{\text{ク}}\right)^2=\left(\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\right)^2 \quad \cdots\cdots②$$

を満たし，点 Q の軌跡は $\left(\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}},\ \boxed{\text{ク}}\right)$ を中心とする半径 $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ の円である。この円を C' とする。

（次ページに続く）

(2)　円 C と円 C' の二つの交点と原点 O を頂点とする三角形の面積 S を求めよう。

C と C' の二つの交点を通る直線を ℓ とする。C と C' の交点の座標 $(x,\ y)$ は，等式①と②を満たす。これらの差をとることにより得られる等式は

$$\boxed{\text{サ}}\,x+\boxed{\text{シ}}\,y=15$$

であり，これが ℓ の方程式である。また，O と ℓ の距離は $\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。

したがって，$S=\dfrac{\boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チ}}}$ である。

テキスト解答

【講義問題の略解】

※講義授業の内容を補完するものです．記述式の試験の答案を想定したものとはなっておりません．ご了承ください．

第１講　指数関数・対数関数・図形と方程式

1 (1)　$X=2^x$ とおくと，$X>0$　(①)

$4^{x+a}=4^a\cdot 4^x=(2^2)^a\cdot(2^2)^x=2^{2a}\cdot(2^x)^2$，$2^{x+a}=2^a\cdot 2^x$ より，

$$4^{x+a}-2^{x+a}+a=0\quad\cdots\cdots①\quad\Longleftrightarrow\quad 2^{2a}\cdot(2^x)^2-2^a\cdot 2^x+a=0$$

よって，①を X を用いて表すと，$2^{2a}X^2-2^aX+a=0$　……②となる．

X の２次方程式の判別式を D とすると，$D=(2^a)^2-4\cdot 2^{2a}\cdot a=2^{2a}(\mathbf{1}-\mathbf{4}a)$ である．

(2)　$a=\dfrac{1}{4}$ のとき，$D=0$ であり，このとき②の解は，$X=\dfrac{2^{a-1}}{2^{2a}}=2^{-a-1}=2^{-\frac{5}{4}}$

よって，②は $X>0$ の範囲にただ一つの解をもつ．

$X=2^{-\frac{5}{4}}$ より，$2^x=2^{-\frac{5}{4}}$　したがって，①もただ一つの解 $x=-\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{4}}$ をもつ．

(3)　$a\neq\dfrac{1}{4}$ のとき，$f(X)=2^{2a}X^2-2^aX+a$ とおくと，

$2^{2a}>0$ より，関数 $y=f(X)$ のグラフは，下に凸の放物線である．

②が $X>0$ の範囲でただ一つの解をもつのは，$y=f(X)$ のグラフが X 軸と $X>0$ の範囲でただ一つの共有点をもつときである．

$f(0)=0$，つまり $a=0$ のとき，

$$f(X)=X^2-X=X(X-1)$$

より，$y=f(X)$ のグラフは $X=0$，１において X 軸と交わり，適する．

$f(0)<0$，つまり $a<0$ のとき，

$y=f(X)$ のグラフは X 軸と $X<0$，$X>0$ で交わり，適する．

よって，②が $X>0$ の範囲でただ一つの解をもつための必要十分条件は，$a\leqq 0$　(③)

したがって，$a\leqq 0$ のとき，②は２解

$$X=\frac{2^a\pm\sqrt{D}}{2\cdot 2^{2a}}=\frac{2^a\pm\sqrt{(2^a)^2\cdot(1-4a)}}{2\cdot 2^{2a}}=\frac{2^a\pm 2^a\sqrt{1-4a}}{2\cdot(2^a)^2}=\frac{1\pm\sqrt{1-4a}}{2^{a+1}}$$ をもち，

$X>0$ の範囲にただ一つの解 $X=\dfrac{1+\sqrt{1-4a}}{2^{a+1}}$ をもち，

$2^x=\dfrac{1+\sqrt{1-4a}}{2^{a+1}}$ より，$x=\log_2\dfrac{1+\sqrt{1-4a}}{2^{a+1}}=\log_2(1+\sqrt{1-4a})-\log_2 2^{a+1}$

したがって，$a\leqq 0$ のとき①はただ一つの解 $x=-a-\mathbf{1}+\log_2(\mathbf{1}+\sqrt{1-4a})$ をもつ．

2　$s=\log_2 x$，$t=\log_2 y$ のとき，$f(x)=\log_2 x$ のグラフを考えると，
$x>1$ において s のとり得る値の範囲は $s>\mathbf{0}$，t のとり得る値の範囲は実数全体である．

$$\log_2 A=\log_2 x\sqrt{y}=\log_2 x+\log_2 y^{\frac{1}{2}}=\log_2 x+\frac{1}{2}\log_2 y=s+\frac{t}{\mathbf{2}}$$

また，底の変換公式により，$\log_4 x=\dfrac{\log_2 x}{\log_2 4}=\dfrac{1}{2}s$　(⑤)

$(2y)^{\log_4 x}=16$ の両辺の 2 を底とする対数をとると，

$$\log_2(2y)^{\log_4 x}=\log_2 16 \iff \log_4 x\times\log_2 2y=4 \iff \frac{\log_2 x}{\log_2 4}\times(\log_2 2+\log_2 y)=4$$

よって，$\dfrac{1}{2}s\times(1+t)=4$ より，$s(t+\mathbf{1})=\mathbf{8}$　　これを変形して，$t=\dfrac{8}{s}-1$

このとき，$\log_2 A=s+\dfrac{t}{2}=s+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{8}{s}-1\right)=s+\dfrac{\mathbf{4}}{s}-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

$s>0$，$\dfrac{4}{s}>0$ より，(相加平均)≧(相乗平均) から，

$$s+\frac{4}{s}-\frac{1}{2}\geqq 2\sqrt{s\times\frac{4}{s}}-\frac{1}{2}=4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$$

等号成立は，$s=\dfrac{4}{s}$，$s^2=4$，つまり $s=\mathbf{2}$ のとき．

このとき，$\log_2 x=2$　　よって，$x=2^2=\mathbf{4}$
また，$t=3$ より，$\log_2 y=3$　　よって，$y=2^3=\mathbf{8}$
したがって，A は $x=4$，$y=8$ のとき，最小値 $4\sqrt{8}=\mathbf{8}\sqrt{\mathbf{2}}$ をとる．

3　(1)　原点中心，半径 2 の円 C の方程式は，$x^2+y^2=2^2$　つまり　$x^2+y^2=\mathbf{4}$
A(4，3)，P(s，t)，Q(x，y) のとき，Q は AP を 2：1 に内分するので

$$x=\frac{1\cdot 4+2\cdot s}{2+1}=\frac{\mathbf{4+2}s}{\mathbf{3}},\quad y=\frac{1\cdot 3+2\cdot t}{2+1}=\frac{\mathbf{3}+2t}{3}$$

よって，$s=\dfrac{3x-4}{2}$，$t=\dfrac{3y-3}{2}$ …①

また，点 P(s，t) は円 C 上の点より，$s^2+t^2=4$ …②

①を②に代入して，

$$\left(\frac{3x-4}{2}\right)^2+\left(\frac{3y-3}{2}\right)^2=4$$

$$\frac{(3x-4)^2}{4}+\frac{(3y-3)^2}{4}=4$$

$$\left\{3\left(x-\frac{4}{3}\right)\right\}^2+\{3(y-1)\}^2=16$$

$$9\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+9(y-1)^2=16\qquad \text{ゆえに，}\left(x-\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}\right)^2+(y-\mathbf{1})^2=\left(\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}\right)^2$$

よって，点 Q の軌跡は $\left(\dfrac{4}{3},\ 1\right)$ を中心とする半径 $\dfrac{4}{3}$ の円である．これを C' とする．

(2)　円 C：$x^2+y^2-4=0$ と円 C'：$\left(x-\dfrac{4}{3}\right)^2+(y-1)^2-\dfrac{16}{9}=0$ の二つの交点を通る図形は，$\left(x-\dfrac{4}{3}\right)^2+(y-1)^2-\dfrac{16}{9}+k(x^2+y^2-4)=0$（$k$ は実数）と表される．

これが直線を表すのは $k=-1$ のときで，このとき

$$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+(y-1)^2-\frac{16}{9}-(x^2+y^2-4)=0$$

であり，これは，円 C と円 C' の二つの方程式の差をとったものである．

これを整理すると，

$$x^2-\frac{8}{3}x+\frac{16}{9}+y^2-2y+1-\frac{16}{9}-x^2-y^2+4=0$$

よって，$\mathbf{8}x+\mathbf{6}y=15$　　これが C と C' の２つの交点を通る直線 ℓ の方程式である．

また，O(0，0) と直線 ℓ：$8x+6y-15=0$ の距離は，

$$d=\frac{|8\cdot0+6\cdot0-15|}{\sqrt{8^2+6^2}}=\frac{|-15|}{10}=\frac{15}{10}=\mathbf{\frac{3}{2}}$$

である．

C と C' の２つの交点を B，C とすると，OB，OC はともに円 C の半径であることから △OBC は OB＝OC＝2 の二等辺三角形であり，O から BC に垂線を下ろすと，その長さは d である．

三平方の定理より，$\sqrt{2^2-d^2}=\sqrt{2^2-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$　　よって，$\mathrm{BC}=2\times\dfrac{\sqrt{7}}{2}=\sqrt{7}$

したがって，△OBC の面積 S は，$S=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{BC}\cdot d=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{7}\cdot\dfrac{3}{2}=\mathbf{\dfrac{3\sqrt{7}}{4}}$